Всероссийская олимпиада школьников – 2017
Школьный этап математика
5 класс

Решения:

1. На пиратском рынке бочка рома стоит 800 дублонов, или 100 пиастров, а пистолет стоит 100 дублонов, или 250 дукатов. Сколько пиастров нужно заплатить за попугая, если за него просят 100 дукатов?

Ответ: 5 пиастров

2. Три синих попугая капитана Флинта съедают 3кг. корма за три дня, пять зеленых попугаев – 5кг. корма за пять дней, а семь оранжевых – 7кг. корма за семь дней. Какие попугаи самые прожорливые?

Решение: За один день три синих съедают – 1кг. корма, пять зеленых и семь оранжевых тоже съедают в день по 1кг корма.

Ответ: Синие попугаи самые прожорливые.

3. Крепость имеет вид семиугольника, в каждой вершине которого находится сторожевая башня. Каждую из семи стен крепости охраняют стражники в башнях, находящихся в концах этой стены. Какое наименьшее количество стражников нужно разместить в башнях, чтобы каждая стена охранялась не менее чем семью стражниками?

Решение: Комментарии по оцениванию: Занумеруем башни подряд 1, 2, 3,…,7.

Тогда в первой башне находится x_1 стражник, во второй – x_2 стражник, … в седьмой – x_7 стражник. Каждая стена охранялась не менее чем семью стражниками, значит,

$x_1+x_2 <7$, $x_2+x_3 >7$ и т.д. Складывая эти неравенства, получим: $2(x_1+x_2+\ldots+x_7) > 49$, отсюда $(x_1+x_2+\ldots+x_7) > 49:2$, поскольку число стражников целое, то оно не может быть меньше 25.Ответ: 25.

4. Пират испортил карту сокровищ, имеющую форму квадрата. Он вырезал из неё восьмиугольник, а 5 отрезанных многоугольников выбросил. Оставшейся восьмиугольник имеет стороны равной длины, и внутренние углы равной величины.

а) Можно ли по этому восьмиугольнику восстановить размеры карты сокровищ?

б) Определите, какую форму могли иметь 5 отрезанных многоугольников.

Решение: Комментарии по оцениванию:

а) Можно ли по этому восьмиугольнику восстановить размеры карты сокровищ? (3 балла)

б) Определите, какую форму могли иметь 5 отрезанных многоугольников. (за каждый приведенный пример 2 балла)

Так как оставшийся кусок имеет форму правильного восьмиугольника, а отрезанных кусков – 5, то они могут иметь не больше одной общей стороны со стороной восьмиугольника. Значит, минимум три стороны восьмиугольника принадлежат квадрату. Поэтому форма искомой карты сокровищ будет квадрат со стороной, равной расстоянию между противоположными сторонами восьмиугольника. Отрезанные многоугольнику будут: 1) 5 треугольников; 2) 4 треугольника и один четырехугольник.

5. Робинзон попал на необитаемый остров. Каждый день (начиная с того дня, когда он попал на остров) он вырезал на доске первую букву в названии дня недели на русском языке. На 2013–й день, вырезав букву, он посчитал вырезанные буквы. Оказалось, что разных букв было вырезано разное количество. В ответ запишите день недели, когда Робинзон попал на остров.

Решение: В течение недели Робинзон вырежет на доске по две буквы «п» (понедельник, пятница), «в» (вторник, воскресенье), «с» (среда, суббота) и одну букву «ч» (четверг). Так как $2013=287\cdot 7+4=2009+4$, то через 2009 дней будет вырезано по 574 буквы «п», «в», «с» и 287букв «ч». Через четыре дня количества букв оказались различными. Для этого нужно, чтобы в эти четыре дня одна из букв «п», «в», «с» появилась дважды, одна – один раз и одна не появлялась. Значит, четвертой появившейся буквой должна быть «ч». Буквы идут в следующем порядке: «п», «в», «с», «ч», «п», «с», «в», «п», «в», «с» …

Таким образом, возможна лишь ситуация: «с», «ч», «п». Это означает, что Робинзон попал на остров в среду.

Ответ: среда

ИТОГО: 35 баллов

6 класс

Решения.

1.Поставьте вместо звездочек цифры:

$$\begin{array}{r} 315 \\ \underline{\times\ \ 41} \\ 315 \\ \underline{1260\ \ } \\ 12915 \end{array}$$

2.Ответ. $\frac{1}{64}$

3. Ответ. 40 лет.

4. Так как Аня никогда не проигрывала мальчикам в шахматы, то она - лучший

Шахматист. Так как художник не нарисовал своего портрета, а нарисовал портрет

Игоря, то Игорь - лучший математик, а Олег - лучший художник.

5.

Число решенных задач	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Число набранных очков	20	17	14	11	8	5	2	0	0	0

Из таблицы видно, что существует всего 8 различных возможностей получения очков.

А так как учеников было 9, то по крайней мере, два ученика из них получили одинаковое число очков. (Считается, что ученик, набравший больше штрафных очков, чем зачетных очков, набрал ноль очков)

ИТОГО: 35 баллов

7 класс

Решения:

1.Назовем симметричным число, которое читается одинаково как в одну, так и в другую сторону (например, числа 63836 и 210012 – симметричные). Найдите наименьшее симметричное число с суммой цифр 100.

Ответ: 599999999995

Решение: Меньше цифр в числе будет, если наибольшее число раз использовать цифру 9.

Если использовать 11 раз цифру 9, то придется использовать еще одну 1, так как

100 =11$\cdot$ 9 +1, но ни одно из таких чисел не получится симметричным, так как если в симметричном числе некоторая цифра используется нечётное число раз, то она должна быть написана в центре числа, а у нас таких цифр две (11 и 1 – нечётные).

Если использовать 10 раз цифру 9, то сумма других цифр числа должна равняться 10, ёё можно получить, складывая 2 одинаковые цифры: 5+5=10, иначе в числе будет больше цифр, а мы ищем наименьшее симметричное.

Итак, наименьшее симметричное число с суммой цифр 100 – это 599999999995.

2. В стране 11% жителей не имеют работы. В столице страны ситуация лучше: только 4% жителей не имеют работы. Но в провинции 12% жителей безработные. Какой процент жителей страны живет в столице?

Ответ: 12,5%

Решение: Пусть x человек живет в столице и y человек – в провинции. Тогда по условию задачи составим уравнение: 0,11(x+y) = 0,04x + 0,12y; 7x = y.

Значит, в столице живет одна восьмая часть населения страны, то есть 12,5% жителей страны.

3. Учитель задал Пете и Васе 100 задач. Тот, кто решает задачу первым, получает за неё 3 очка, вторым – 1 очко. В результате каждый из них решил по 75 задач (не обязательно одинаковых). Могли ли они в сумме набрать345 очков?

Ответ: нет

Решение: Пусть x – количество задач, решённых обоими мальчиками. За каждую из них они получат вместе по 3+1=4 очка. Кроме того, есть 75 – x задач, решённых только Петей и 75 – x задач, решённых только Васей. За каждую из них получают по 3 очка. Составим и решим уравнение: 4x + 3(75-x) + 3(75-x)=345; x=52,5. Так как корень уравнения не натуральный, то в сумме мальчики набрать 345 очков не могли.

4. Сын по реке доплывает от моста до пляжа за 9 минут, а от пляжа до моста – за 12 минут. Его отец от моста до пляжа доплывает за 4 минуты. Сколько времени надо отцу, чтобы доплыть от пляжа до моста?

Ответ: 4,5 минуты

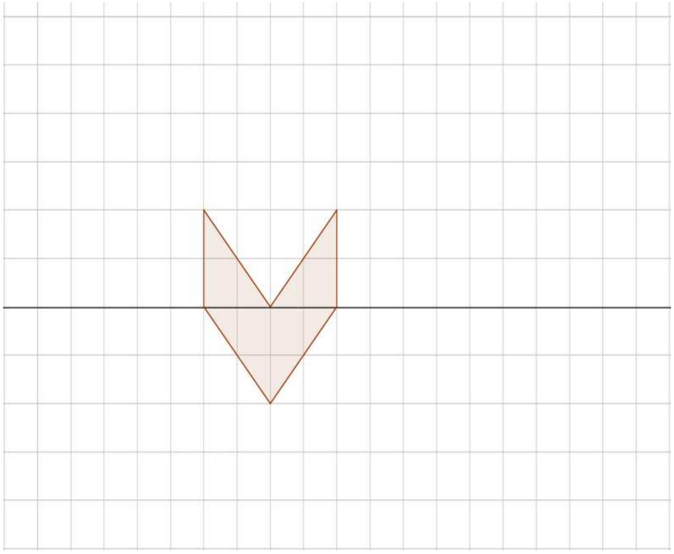
Решение: Из условия ясно, что от моста до пляжа плывут по течению реки, обратно – против течения. Примем расстояние от моста до пляжа за 1.

$(\frac{1}{9} - \frac{1}{12}) : 2 = \frac{1}{72}$ (расстояния в минуту)– это скорость течения реки.

$1 : \left(\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{72}\right) = 1 : \frac{2}{9}$=4,5(мин) – искомое время.

5. Начертите шестиугольник, который можно одним прямолинейным разрезом разделить на 3 части, причём из двух образовавшихся частей можно сложить третью часть. Покажите, как разрезать 6-ник и как сложить из двух фигур третью.

Ответ: Шестиугольник и линия разреза показаны на рисунке.



8 класс

Решения:

1. В Цветочном городе любые два дома соединяет прямой участок дороги. Чтобы сходить к кому-нибудь в гости, Знайка может поступить одним из двух способов: выйти сразу и идти пешком, или, вызвав такси и подождав его определенное время, ехать на нем. Скорость ходьбы и скорость движения такси постоянны, время ожидания такси также постоянно. В каждом случае Знайка выбирает тот способ, который потребует меньше времени. До дома Винтика, расстояние до которого равно 1 км, Знайка добирается за 12 мин, до дома Шпунтика, расстояние до которого равно 2 км – за 18 мин, а до дома Пончика, расстояние до которого равно 3 км – за 20 мин. Сколько времени потребуется Знайке, чтобы добраться до дома Незнайки, расстояние до которого равно 5 км?

Решение. До Шпунтика Знайка едет на такси (иначе, если бы он 2 км проходил пешком за 18 мин, то 1 км до Винтика он мог бы пройти за 9 мин). Аналогично, до Пончика Знайка также едет на такси. Значит 1 км такси проезжает за 20-18=2 мин. Значит, время ожидания такси равно 18-2*2=14 мин, из чего следует, что до Винтика Знайка ходит пешком. Теперь считаем время, необходимое чтобы добраться до Незнайки. Пешком потребуется 12*5=60 мин, на такси – 14+2*5=24 мин.

<u>Ответ:</u> 24 мин

Критерии. Ответ: 2б. Доказательство, что до Шпунтика и Пончика Знайка едет на такси: +3б. Остальные 2б – за обоснование того, что пешком до Незнайки добираться дольше.

2. Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха - уменьшается на 10%. Может ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

Решение. После каждого удачного выстрела количество денег стрелка умножается на 1,1, 10%, а после каждого промаха - на 0,9. Начальный капитал составляет 10000 копеек, а после нескольких выстрелов должно получиться 8019 копеек. Разложим число 8019 на множители: $8019=9^3\cdot 11$, значит, $8019=10000\cdot 1{,}1\cdot (0{,}9)^3$. Таким образом, игроку достаточно один раз попасть и трижды промахнуться.

Критерии. Различные попытки доказать, что не может – 0б. Приведение конкретной последовательности результатов выстрелов, приводящей к нужной сумме – 7б.

3. Высоты AA_1 и CC_1 Остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что если AH=CH, то треугольник ABC – равнобедренный.

Решение.По условию, треугольник AHC – равнобедренный. Но тогда из прямоугольных треугольников CA_1A и AC_1C имеем 90 = ACB∠ - °∠HAC=90°-∠HCA= =∠CAB, что и требовалось доказать.

4. На одном далеком острове живут два племени: рыцарей (которые всегда говорят правду) и плутов (которые всегда лгут). Один мудрец-путешественник рассказал такую историю. «Приплыв на остров, я встретил двух местных жителей и захотел узнать, из какого они племени. Я спросил первого: «Вы оба рыцари?». Не помню, ответил он «да» или «нет», но по его ответу я не смог однозначно определить кто из них кто. Тогда я спросил у того же жителя: «Вы из одного племени?». Опять-таки, не помню, ответил он «да» или «нет», но после этого ответа я сразу догадался, кто из них кто». Кого же встретил мудрец?

Решение. Всего возможны 4 варианта, кто мог встретиться мудрецу:

1) оба – рыцари;

2) первый – рыцарь, второй – плут;

3) первый – плут, второй – рыцарь;

4) оба – плуты.

В случае 2) на первый вопрос мудрец бы услышал ответ «нет», в случаях 1), 3) и 4) – ответ «да». Поскольку мудрец не смог однозначно определить кто перед ним, значит он услышал ответ «да», и далее выбирал из 3х вариантов. Далее, в случаях 1) и 3) на второй вопрос мудрец бы услышал ответ «да», а в случае 4) – ответ «нет». Поскольку после второго вопроса мудрец смог определить, кто есть кто, он услышал ответ «нет», и это был случай 4).

Ответ: двух лжецов.

Критерии. Анализ ответа на первый вопрос мудреца (исключение случая 2)) – 3 б. Только ответ – 1б.

5. Дано 4 пустых банки. Двое по очереди делают ходы, состоящие в том, что игрок кладет по рублю в три произвольно выбранные банки. Победителем считается тот, после хода которого в одной из банок впервые окажется 100 рублей. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?

Опишите, как должен играть победитель, и объясните, почему, играя таким образом, он выиграет.

Решение. Выиграет партнер, если каждый раз будет повторять только что сделанный ход первого игрока. Тогда каждый раз после хода второго игрока во всех банках будет по четному числу рублей, а после хода первого в тех банках, куда он положил по рублю, будет нечетное число рублей. Так как число 100 – четное, первый игрок его получить не сможет. Но так как рано или поздно 100 рублей в какой-нибудь банке накопится, выиграет второй.

Критерий. Описывая выигрышную стратегию второго игрока, надо не только объяснить, почему первый не может выиграть, но и почему это значит, что выиграет второй, т.е. почему игра не может продолжаться бесконечно.

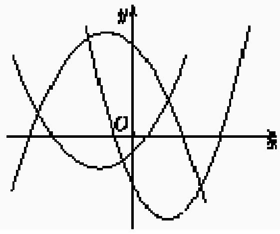
За описание верной стратегии второго игрока – 4 балла. Из оставшихся 3 баллов оценивается обоснование правильности стратегии. За верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9 класс

Решения задач.

1.Задача

На рисунке изображены графики трёх квадратных трёчленов. Можно ли подобрать такие числа *a*, *b* и *c*, чтобы это были графики трёхчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a и cx^2+ax+b?



Решение 1

Пусть это удалось. У двух парабол "ветви" направлены вверх, а у одной – вниз, поэтому у двух трёхчленов старший коэффициент положительный, а у одного – отрицательный. Следовательно, среди чисел *a*, *b* и *c* должны быть два положительных и одно отрицательное. С другой стороны, две из парабол пересекают ось *Oy* в точках с отрицательными ординатами, а третья – в точке с положительной ординатой, поэтому у двух трёхчленов свободный член отрицательный, а у одного – положительный. Следовательно, среди чисел *a*, *b* и *c* должны быть два отрицательных и одно положительное. Противоречие.

Решение 2

Такие параболы имеют общую точку $(1, a+b+c)$. Но на рисунке такой точки нет.

Ответ

Нельзя.

2. **Задача**

В выпуклом четырехугольнике *ABCD* выполняются равенства: $\angle CBD = \angle CAB$ и

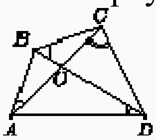
$\angle ACD = \angle ADB$.

Докажите, что из отрезков *BC*, *AD* и *AC* можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение

Пусть диагонали *AC* и *BD* четырёхугольника *ABCD* пересекаются в точке O. Треугольники *ABC* и *OC* подобны по двум углам. Следовательно, BC:$OC = AC$: BC, откуда $BC^2=AC\cdot OC$. Аналогично $AD^2=AC\cdot AO$ и $BC^2+AD^2=AC\cdot OC+AC\cdot AO =$

AC^2. Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, из отрезков BC, AD и AC можно сложить прямоугольный треугольник.



3.Задача

Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать.

Решение

Раскрасим шахматную доску в три цвета по диагоналям, начиная с левого нижнего угла доски (рис. а). Тогда при разрезании части доски на прямоугольники 1×3 в каждом прямоугольнике окажутся клетки всех трёх цветов. Следовательно, после вырезания квадрата клеток каждого из цветов на доске должно остаться поровну. До вырезания на доске 21 клетка цвета 1, 22 клетки цвета 2 и 21 клетка цвета 3. Значит, вырезали квадрат, в котором две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3.

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Рис. а

3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1

Рис. б

Таких квадратов много. Однако, мы можем раскрасить доску еще тремя аналогичными способами – начиная с правого нижнего угла доски, с правого верхнего или с левого верхнего (пример раскраски, начинающейся с правого нижнего угла, см. на рис. б). При каждом из этих способов раскраски количество клеток каждого цвета остается неизменным.

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Рис. в

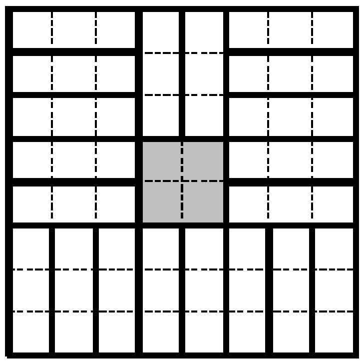


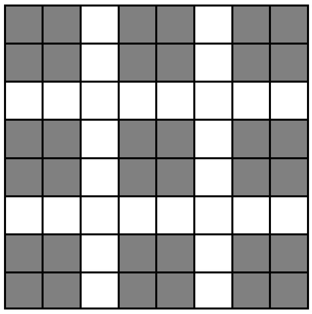
Рис. г

Следовательно, могли быть вырезаны только те квадраты, которые при каждом способе раскраски содержат две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов 9, см. рис. в.

Покажем, как разрезать оставшуюся доску для каждого из девяти случаев. Заметим, что вырезанный квадрат находится в одном из угловых квадратов 5×5, см. рис. в. То есть, достаточно показать, как разрезать на прямоугольники 1×3 квадрат 5×5 без одного из угловых квадратов 2×2 и оставшуюся часть доски. Это показано на рис. г.

Ответ

Любой из девяти квадратов, закрашенных на рисунке.



4 Задача

Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного – ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

Решение

Первый способ. На банку напитка уходит $^1/_6$ бидона яблочного и $^1/_{10}$ бидона виноградного сока, значит, объем банки равен $^1/_6 + ^1/_{10}$ объема бидона. После изменения рецептуры на банку напитка уходит $^1/_5$ бидона яблочного сока и $^4/_{15}–^1/_5=^1/_{15}$ объема бидона виноградного сока.

Второй способ. На 30 банок напитка было затрачено 5 бидонов яблочного и 3 бидона виноградного сока, то есть всего 8 бидонов. По новой рецептуре на 30 банок затратят 6 бидонов яблочного сока. Значит, виноградного сока затратят 2 бидона. Итак, бидона виноградного сока хватит на 15 банок.

Ответ

На 15 банок.

5 Задача

В лес за грибами пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали $n^2+ 9n–2$ гриба, причём все они собрали поровну грибов.

Кого было больше: мальчиков или девочек?

Решение

Из условия следует, что $n^2+ 9n– 2$ делится на $n+ 11$. Значит, на $n+ 11$ делится также число $(n^2+ 9n– 2) – (n– 2)(n+ 11) = 20$, откуда следует, что $n+ 11 \le 20$, то есть $n\le 9$. Итак, мальчиков было не больше девяти, то есть меньше, чем девочек.

Ответ

Девочек.

ИТОГО: 35 баллов

10 класс

Решения:

№1. Приведите пример трех пар натуральных чисел a и b таких, что a^2+1 делится на b, аb^2+1 делится на a?

Ответ: (2;5), (5;13), (13;34). Заметим, что в качестве таких пар подходят числа Фибоначчи, взятые через одно: 2, 5, 13, 34, 89, …

№2. Турист шел 2,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что эго средняя скорость за все это время равна 5 км/ч?

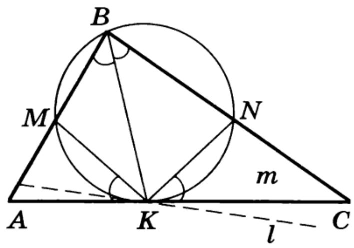
Ответ: Нет. Он мог, например, идти полчаса со скоростью 4 км/ч, потом полчаса со скоростью 6 км/ч, следующие полчаса- 4 км/ч, и т.д.

№3. Петя и Вася бросают монету: Петя её бросил 2017 раз, а Вася - 2018 раз. Чему равна вероятность того, что у Васи монета упала орлом больше раз, чем у первого?

Ответ: 0,5. Если у Васи в первый раз выпал орел, то благоприятными являются случаи, когда в остальных 2017 бросаниях у Васи выпало не меньше орлов, чем у Пети. Если же у Васи в первый раз выпала решка, то благоприятными являются   «наоборот» те случаи, когда в остальных 1017 у Пети выпало меньше, чем у Васи.

№4. В треугольнике АВС проведена биссектриса ВК и на сторонах ВА и ВС взяты точки М и N так , что ‹ АКМ = ‹CKN = $\frac{1}{2}$ ‹ ABC. Докажите, что прямая АС касается окружности, описанной около треугольника MBN.

Доказательство: Пусть ‹ ABC=2α, тогда ‹MKN=π - ‹ AKM - ‹CKN = π - 2α, т.е. ‹ MBN + ‹MKN = π. Значит, четырехугольник MBNK – вписанный, т.е. окружность, описанная около треугольника MBN, проходит также через точку К. Проведем через точку К касательную ℓ к этой окружности, тогда угол между ℓ и хордой KN измеряется половиной дуги KmN, т.е. равен ‹KBN. Но ‹CKN = ‹KBN. Значит, ℓ совпадает с КС, т.е. КС– касательная.



№ 5. На доске написаны два взаимно простых натуральных

числа a и b. Разрешается дописывать на доску либо утроенное

произведение любых двух из написанных чисел, либо

увеличенную на 1 сумму любых двух из написанных чисел.

Верно ли, что на доске можно получить квадрат натурального

числа при любых начальных a и b.

Ответ : неверно. Если написать на доске два числа , дающих при делении на 4 остаток 3, т. е. a= 4m+3 и b=4n+3, то 3ab = 3(4m+3)(4n+3) = 4(12mn+9m+9n)+3 и a + b+1 = (4m+3)+(4n+3)+1=4(m+n+1)+3. Т.о. все записанные на доске числа будут давать остаток 3 при делении на 4. Однако квадраты натуральных чисел дают только остатки 0 или1 при делении на 4.

ИТОГО: 35 баллов

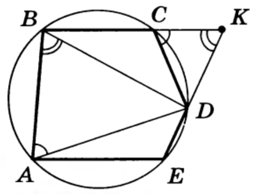
11 класс

Решения:

№ 1. Косинус и синус некоторого угла оказались корнями приведенного квадратного трехчленаx^2 + px +q. Докажите, что p^2= 1+2q.

Доказательство: Из теоремы Виета получаем $\sin\alpha\cos\alpha$= q и $\sin\alpha+\cos\alpha$=-p. Возведем последнее равенство в квадрат, получим $p^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$= 1+2q. Что и требовалось доказать.

№2. Турист шел 2,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что эго средняя скорость за все это время равна 5 км/ч?



Ответ: Нет. Он мог, например, идти полчаса со скоростью 4 км/ч, потом полчаса со скоростью 6 км/ч, следующие полчаса- 4 км/ч, и т.д.

№3. Петя и Вася бросают монету: Петя её бросил 2017 раз, а Вася - 2018 раз. Чему равна вероятность того, что у Васи монета упала орлом больше раз, чем у первого?

Ответ: 0,5. Если у Васи в первый раз выпал орел, то благоприятными являются случаи, когда в остальных 2017 бросаниях у Васи выпало не меньше орлов, чем у Пети. Если же у Васи в первый раз выпала решка, то благоприятными являются   «наоборот» те случаи, когда в остальных 1017 у Пети выпало меньше, чем у Васи.

№ 4. Дан вписанный пятиугольник ABCDE с параллельными сторонами AE и BC. Пусть точка K – точка пересечения прямых BC и DE. Докажите, что DK ×DA= DC× DB.

Доказательство: т.к. четырехугольник ABCD – вписанный, то ‹DKC = π - ‹DCB = ‹DAB. В силу параллельности ‹CKD = π - ‹KEA= π - ‹DEA = ‹DBA, т.е. треугольники ABD и CKD подобны по двум углам, откуда $\frac{DK}{DC} = \frac{DB}{DA}$, что и требовалось доказать.

№5. На доске написаны два взаимно простых натуральных числа a и b. Разрешается дописывать на доску либо утроенное произведение любых двух из написанных чисел, либо увеличенную на 1 сумму любых двух из написанных чисел. Верно ли, что на доске можно получить квадрат натурального числа при любых начальных a и b.

Ответ : неверно. Если написать на доске два числа , дающих при делении на 4 остаток 3, т. е. a= 4m+3 и b=4n+3, то 3ab = 3(4m+3)(4n+3) = 4(12mn+9m+9n)+3 и a + b+1 = (4m+3)+(4n+3)+1=4(m+n+1)+3. Т.о. все записанные на доске числа будут давать остаток 3 при делении на 4. Однако квадраты натуральных чисел дают только остатки 0 или1 при делении на 4.

ИТОГО: 35 баллов